ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM HỒNG CẨM

KĨ THUẬT TỔNG HỢP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH HỖN HỢP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM HỒNG CẨM

KĨ THUẬT TỔNG HỢP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH HỖN HỢP

Chuyên ngành : Phương pháp toán sơ cấp
Mã số : 60 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS. TS. TẠ DUY PHƯỢNG

THÁI NGUYÊN - 2017

MỤC LỤC

Mở đầu	1
Chương 1: Phân loại phương pháp và kĩ thuật tổng hợp giải phương trình, hệ phương trình hỗn hợp.	**4**
1.1. Kĩ thuật biến đổi tương đương	4
1.1.1. Kĩ thuật biến đổi tương đương	5
1.1.2. Kĩ thuật nhân với biểu thức liên hợp	7
1.2. Kĩ thuật đặt ẩn phụ	9
1.2.1 Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình dạng tổng và tích các ẩn	10
1.2.2 Một số phương trình và hệ phương trình giải được nhờ đặt ẩn phụ	11
1.3. Phương pháp điều kiện cần và đủ	15
1.4. Phương pháp hàm số	19
1.4.1. Kĩ thuật sử dụng tính đồng biến ngặt của hàm số	19
1.4.1.1. Sử dụng tính đồng biến của các hàm cơ bản	19
1.4.1.2. Kĩ thuật chủ đạo 2	22
1.4.1.3. Kĩ thuật chủ đạo 3	30
1.4.2. Phương pháp giá trị lớn nhất nhỏ nhất và đánh giá	33
1.5. Bài tập tương tự	36
Chương 2: Một số kĩ thuật tổng hợp giải phương trình, hệ phương trình hỗn hợp	**40**
2.1. Phương trình với nhiều cách giải	40
2.2. Các kĩ thuật giải phương trình và hệ phương trình	48
2.3. Bài tập tương tự	71
Kết luận	75
Tài liệu tham khảo	76

MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài

Phương trình và hệ phương trình hỗn hợp được hiểu là phương trình và hệ phương trình phức tạp, chứa nhiều loại hàm khác nhau (đa thức, căn thức, mũ, logarithm,...). Để giải những phương trình chứa nhiều loại hàm, ta thường phải "bóc từng lớp" để đưa về phương trình và hệ phương trình đơn giản. Tuy nhiên, cũng có nhiều phương trình, hệ phương trình hỗn hợp đòi hỏi sử dụng *kĩ thuật giải tổng hợp*, nói chung không thể dùng *một kĩ thuật*, mà phải sử dụng tổng hợp *một vài* hoặc đồng thời *nhiều kĩ thuật* để giải được những phương trình, hệ phương trình loại này.

Đã có một số sách (xem, thí dụ, [1], [2], [5]–[9], [11]) và một số luận văn cao học (xem, thí dụ, [3], [4]) viết về phương pháp giải phương trình và hệ phương trình, tuy nhiên, theo quan sát của chúng tôi, vẫn cần đi sâu phân tích *cụ thể và chi tiết* hơn *các phương pháp* và *các kĩ thuật tổng hợp* giải phương trình, hệ phương trình hỗn hợp.

Trong các đề thi Trung học Phổ thông Quốc gia những năm gần đây (trước 2017), hai câu khó (câu 9 và câu 10) thường là các bài toán *về* hoặc *liên quan tới* phương trình và hệ phương trình hỗn hợp. Để giải các bài toán này, cần sử dụng thành thạo và nhuần nhuyễn các kĩ thuật tổng hợp. Phương trình và hệ phương trình hỗn hợp cũng hay gặp trong các kì thi học sinh giỏi (Olympic 30–4, vô địch Quốc gia, Quốc tế).

Với những lí do trên, tác giả đã lựa chọn đề tài *Kĩ thuật tổng hợp giải phương trình, hệ phương trình hỗn hợp* làm đề tài luận văn cao học của mình.

2. Lịch sử nghiên cứu

Chủ đề phương trình, hệ phương trình có vị trí và vai trò quan trọng trong chương trình môn Toán ở trường Trung học phổ thông. Kiến thức và kĩ năng của chủ đề này có mặt xuyên suốt từ cuối Trung học Cơ sở, tới đầu cấp và đến cuối cấp Trung học phổ thông. Nó đóng vai trò như là chìa khóa để giải quyết nhiều bài toán trong thực tế.

Đã có khá nhiều tài liệu viết về chủ đề phương trình, hệ phương trình. Tuy nhiên, theo quan sát của chúng tôi, ngoại trừ [4], chưa có nhiều tài liệu hay đề tài luận văn cao học phân tích sâu về kĩ thuật giải phương trình, hệ phương trình hỗn hợp.

3. Mục đích, đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Luận văn hệ thống hóa và trình bày một số kĩ thuật giải phương trình, hệ phương trình hỗn hợp thường gặp trong các kì thi Olympic, thi học sinh giỏi Quốc gia và Quốc tế. Tất cả các bài toán, ví dụ minh họa và bài toán tương tự trong luận văn đều được chọn lựa từ các đề thi vào đại học hoặc các bài thi học sinh giỏi Quốc gia và Quốc tế trong và ngoài nước, chủ yếu là các đề thi trong các năm gần đây, dựa trên nhiều tài liệu trong và ngoài nước, thí dụ, [10], [12]. Bên cạnh việc hệ thống hóa các đề thi, luận văn còn cố gắng phân tích, tổng hợp các phương pháp thông qua các ví dụ cụ thể.

4. Mục tiêu của luận văn

Luận văn có mục tiêu trình bày các phương pháp và kĩ thuật tổng hợp giải phương trình, hệ phương trình hỗn hợp. Các phương pháp và kĩ thuật tổng hợp giải phương trình, hệ phương trình hỗn hợp hoàn toàn có thể áp dụng cho các bài toán chứng minh bất đẳng thức, giải bất phương trình, hệ bất phương trình, và các bài toán cực trị. Hi vọng luận văn sẽ góp phần làm sáng tỏ thêm các kĩ thuật và phương pháp giải phương trình, hệ phương trình và được áp dụng vào thực tế học tập và giảng dạy.

5. Phương pháp nghiên cứu

- Phân tích lí thuyết, phân dạng các loại bài tập.
- Đưa ra các ví dụ minh họa phù hợp với từng nội dung.

- Tổng hợp tài liệu từ sách giáo khoa, sách tham khảo, các sách liên quan đến đề tài.

6. Cấu trúc của luận văn

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận và Tài liệu tham khảo, Luận văn gồm 2 Chương.

Chương 1: Phân loại một số phương pháp và kĩ thuật giải phương trình và hệ phương trình hỗn hợp.

Chương 2: Một số kĩ thuật tổng hợp giải phương trình và hệ phương trình hỗn hợp.

Chương 1

PHÂN LOẠI PHƯƠNG PHÁP VÀ KĨ THUẬT TỔNG HỢP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH HỖN HỢP

Để giải một phương trình, một hệ phương trình hỗn hợp loại khó, thường cần phải đồng thời kết hợp sử dụng một vài kĩ thuật. Tuy vậy, trong mỗi bài toán thường có một *kĩ thuật chủ đạo*. Nhằm dễ dàng phân tích lời giải, các phương trình và hệ phương trình trong luận văn này được *phân loại theo phương pháp giải*. Các phương pháp và kĩ thuật giải được phân loại như dưới đây.

1.1 . Kĩ thuật biến đổi tương đương

Nói chung, quá trình giải phương trình, hệ phương trình là một quá trình biến đổi tương đương từ phương trình, hệ phương trình phức tạp về phương trình, hệ phương trình đơn giản nhờ một số tính chất của các hàm vô tỉ, mũ, logarithm, thí dụ:

Tính chất 1: $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$

Nhận xét: Không cần đòi hỏi và giải điều kiện thừa $f(x) \ge 0.$

Tính chất 2: $f(x)^{g_1(x)} = f(x)^{g_2(x)} \Leftrightarrow f(x) = 1$ hoặc $\begin{cases} f(x) > 0, f(x) \ne 1 \\ g_1(x) = g_2(x). \end{cases}$

Nhận xét: Nhiều học sinh thường quên trường hợp $f(x) = 1.$

Tính chất 3:

$$\log_{f(x)} g_1(x) = \log_{f(x)} g_2(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, f(x) \ne 1 \\ g_1(x) = g_2(x) \\ g_1(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, f(x) \ne 1 \\ g_1(x) = g_2(x) \\ g_2(x) > 0. \end{cases}$$

Nhận xét: Chỉ cần giải một trong hai hệ trên, chọn trong hai điều kiện $g_1(x) > 0$ hoặc $g_2(x) > 0$ điều kiện nào dễ giải hơn.

Kĩ thuật biến đổi tương đương là một *kĩ thuật cơ bản*, tuy nhiên, đối với phương trình, hệ phương trình hỗn hợp, kĩ thuật này không phải lúc nào cũng áp dụng được một cách hợp lí, mà phải kết hợp thêm với các kĩ thuật khác. Các ví dụ cụ thể (các bài toán thi Olympic và các bài thi vào đại học), dưới đây và trong Chương 2 sẽ trình bày và phân tích sâu hơn nhận xét này.

1.1.1. Kĩ thuật biến đổi tương đương

Bài 1 (Thi học sinh giỏi Việt Nam VMO 2002, Bảng A) Giải phương trình

$$\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}} = x-2. \ (1)$$

Giải: Điều kiện để phương trình đã cho có nghĩa là

$$\begin{cases} 10-3x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{10}{3} \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq \frac{10}{3}. \ (*)$$

Với điều kiện (*) ta có: $(1) \Leftrightarrow 4-3\sqrt{10-3x} = x^2-4x+4$

$$\Leftrightarrow 9(10-3x) = x^2(4-x)^2 \Leftrightarrow x^4-8x^3+16x^2+27x-29=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+2)(x^2-7x+15)=0$$

$\Leftrightarrow x=3$ (vì $x^2-7x+15=0$ vô nghiệm và $x=-2$ không thỏa mãn điều kiện (*)).

Đáp số: Phương trình có duy nhất một nghiệm $x=3.$

Bài 2 (Thi Olympic Trung Quốc CMO, 1998) Giải phương trình

$$x = \sqrt{x-\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}. \ (1)$$

Giải: Điều kiện để phương trình đã cho có nghĩa là $x>1. \ (*)$

Với điều kiện (*) thì

$$(1) \Leftrightarrow x-\sqrt{x-\frac{1}{x}} = \sqrt{1-\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x-\frac{1}{x}}\right)^2 = \left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2-1-2\sqrt{x\left(x^2-1\right)}+x=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}\right)^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=\sqrt{x}$$

$\Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ không thỏa mãn điều kiện (*)).

Đáp số: Phương trình có duy nhất một nghiệm $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nhận xét: Trong hai bài toán trên, ta đã sử dụng phương pháp biến đổi tương đương với kĩ thuật cơ bản là bình phương hai vế không âm của phương trình.

Bài 3 (Thi học sinh giỏi Kiên Giang 2014–2015) Giải phương trình

$$x+2\sqrt{5-x}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{10-3x-x^2}-2. \ (1)$$

Giải: Điều kiện để phương trình đã cho có nghĩa là $-2\le x\le 5.$ $(*)$

Với điều kiện trên thì

$$(1) \Leftrightarrow \left[x+2-\sqrt{(x+2)(5-x)}\right]+\left[2\sqrt{5-x}-2\sqrt{x+2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}\left[\sqrt{x+2}-\sqrt{5-x}\right]-2\left[\sqrt{x+2}-\sqrt{5-x}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{5-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}-2=0\\ \sqrt{x+2}-\sqrt{5-x}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+2}=2\\ \sqrt{x+2}=\sqrt{5-x}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$$

Thử lại điều kiện (*) ta đi đến kết luận cả hai giá trị trên đều là nghiệm của phương trình.

Đáp số: $x=2;\ x=\dfrac{3}{2}.$

Nhận xét: Trước khi biến đổi tương đương, phải quan sát thấy và phân tích được $\sqrt{10-3x-x^2}=\sqrt{(x+2)(5-x)}.$ Đây là mấu chốt để giải quyết bài toán. Việc biến đổi tương đương và giải các phương trình vô tỉ cơ bản $\sqrt{x+2}-2=0$ và $\sqrt{x+2}-\sqrt{5-x}$ là không khó, ngay cả với học sinh trung bình.

1.1.2. Kĩ thuật nhân với biểu thức liên hợp

Sử dụng biểu thức liên hợp dạng $a-b=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$,... để biến đổi tương đương phương trình đã cho về dạng đơn giản hơn.

Kĩ thuật này được sử dụng phổ biến trong các bài thi vào đại học và thi học sinh giỏi những năm gần đây.

Bài 4 (Thi học sinh giỏi Hà Tĩnh, năm học 2010–2011, lớp 12) Giải phương trình

$$2(x-6)=3\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3}.\ (1)$$

Giải: Điều kiện để phương trình đã cho có nghĩa là:

$$\begin{cases} x-5\ge 0 \\ x+3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5 \\ x\ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 5.\ (*)$$

Với điều kiện (*), nhân hai vế với biểu thức liên hợp của $3\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3}$ là $3\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3}$, ta được

$$(1)\Leftrightarrow 2(x-6)(3\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3})=9(x-5)-(x+3)$$

$$\Leftrightarrow 2(x-6)(3\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3})=8x-48$$

$$\Leftrightarrow \left(x-6\right)(3\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3})=4(x-6).\ \left(2\right)$$

Trường hợp 1: $x=6$ thỏa mãn điều kiện (*) nên nó là nghiệm của (1). Cũng có thể thay $x=6$ vào phương trình (1) để tin chắc $x=6$ là nghiệm của (1).

Trường hợp 2: $x\ne 6.$ Chia hai vế của phương trình (2) cho $x-6$ ta được

$$(2)\Leftrightarrow 3\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3}=4\Leftrightarrow 9\left(x-5\right)+\left(x+3\right)+6\sqrt{x-5}\sqrt{x+3}=16$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-5}\sqrt{x+3}=29-5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 29-5x\ge 0 \\ x^2-17x+61=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{29}{5} \\ x=\dfrac{17\pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{17-3\sqrt{5}}{2}.$$